Géométrie affine

Exercice 1 Soit $\mathbb{A}$ un espace affine de dimension $n \geq 2$. On se donne trois hyperplans affines (de dimension $n-1$) H_1, H_2 et H_3 de même direction $\overrightarrow{\mathrm{H}}$. Soient D et D$'$ deux droites non faiblement parallèles à H_1.

1. Montrer que D intersecte chaque hyperplan H_j en un unique point A_j. Même question avec D$'$; on note les points d'intersection A'_j.

2. Soit $p : \mathbb{A} \to \mathrm{D}$ la projection sur D parallèlement à $\overrightarrow{\mathrm{H}}$. Montrer que $p(\mathrm{A}'_j) = \mathrm{A}_j$.

3. En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{A}'_1\mathrm{A}'_2} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{A}'_1\mathrm{A}'_3}$

Exercice 2 Soit $\mathbb{A}$ un espace affine. On considère quatre points A, B, C et D.

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On dit alors que ABCD est un parallélogramme.

2. Montrer que ABCD est un parallèlogramme si et seulement si [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.

Exercice 3 Soit $\mathbb{A}$ un espace affine. On considère un ensemble P non vide. Montrer que P est un sous-espace affine si et seulement si P est stable par prise de barcycentre, c'est-à-dire, si $(\mathrm{A}_j)_{1\leq j\leq k}$ sont des points de P munis de poids $(\alpha_j)_{1\leq j\leq k}$, alors le barycentre est dans P.

Exercice 4 Soit $\mathbb{A}$ un espace affine de dimension trois muni d'un repère $\mathcal{R}$. On considère quatre points M_j, $j \in \{1, \ldots, 4\}$ de coordonnées (x_j, y_j, z_j). Montrer qu'ils sont coplanaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 Soit ABC un triangle non aplati du plan affine euclidien. . On note $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$ et $c = \mathrm{AB}$. D'autre part, notons $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{C}} = \widehat{\mathrm{BCA}}$ les angles non orientés. Montrer les assertions suivantes:

1. Le centre de gravité (le point d'intersection des médianes) est le barycentre de $((\mathrm{A}, 1), (\mathrm{B}, 1), (\mathrm{C}, 1))$.

2. Le centre du cercle circonscrit (le point d'intersection des médiatrices) est le barycentre de $((\mathrm{A}, \sin 2\widehat{\mathrm{A}}), (\mathrm{B}, \sin 2\widehat{\mathrm{B}}), (\mathrm{C}, \sin 2\widehat{\mathrm{C}}))$.

3. L'orthocentre (le point d'intersection des hauteurs) est le barycentre de $((\mathrm{A}, \tan \widehat{\mathrm{A}}), (\mathrm{B}, \tan \widehat{\mathrm{B}}), (\mathrm{C}, \tan \widehat{\mathrm{C}}))$.

4. Le centre du cercle inscrit (le point d'intersection des bissectrices) est le barycentre de $((\mathrm{A}, a), (\mathrm{B}, b), (\mathrm{C}, c))$.

5. Si le point M est strictement à l'intérieur du triangle, alors c'est le barycentre de

$$((\mathrm{A}, \mathrm{A}ire(\mathrm{MBC})), (\mathrm{B}, \mathrm{A}ire(\mathrm{MAC})), (\mathrm{C}, \mathrm{A}ire(\mathrm{MAB}))) .$$

Exercice 6 Soit $\mathbb{E}$ un espace affine euclidien de dimension trois muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. On se donne deux droites D_1 et D_2 dirigées par des vecteurs u_1 et u_2 et contenant les points A_1 et A_2.

1. On suppose D_1 et D_2 coplanaires. Montrer que ou bien $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2 \neq \varnothing$ ou bien

$$d(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2) = \frac{\|u \wedge \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\|}\,.$$

On suppose dorénavant que les droites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2. On note $w = u_1 \wedge u_2$. Montrer que $v \neq 0$.

3. On note P_1 et P_2 les plans de repère respectif (A_1, u_1, v) et (A_2, u_2, v). Montrer que ces plans sont non parallèles et qu'il s'intersectent le long d'une droite D dirigée par v.

4. Montrer que D est orthogonale à D_1 et D_2, et que D est la seule droite orthogonale à ces deux droites.

5. On note $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}_1 = \{\mathrm{B}_1\}$ et $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}_2 = \{\mathrm{B}_2\}$. Montrer que pour tout $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{D}_1$ et tout $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{D}_2$, on a

$$d(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2) \leq d(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2)\,.$$

6. En déduire

$$d(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2) = \frac{|\langle v, \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\rangle|}{\|v\|} = \frac{|[u_1, u_2, \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}]|}{\|v\|}\,.$$